



Calculus

KALKULUS DASAR

Fanny Novika

KALKULUS DASAR

Fanny Novika, M.Si



Tahta Media Group

UU No 28 tahun 2014 tentang Hak Cipta

Fungsi dan sifat hak cipta Pasal 4

Hak Cipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 3 huruf a merupakan hak eksklusif yang terdiri atas hak moral dan hak ekonomi.

Pembatasan Pelindungan Pasal 26

Ketentuan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 23, Pasal 24, dan Pasal 25 tidak berlaku terhadap:

- i. penggunaan kutipan singkat Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait untuk pelaporan peristiwa aktual yang ditujukan hanya untuk keperluan penyediaan informasi aktual;
- ii. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk kepentingan penelitian ilmu pengetahuan;
- iii. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk keperluan pengajaran, kecuali pertunjukan dan Fonogram yang telah dilakukan Pengumuman sebagai bahan ajar; dan
- iv. penggunaan untuk kepentingan pendidikan dan pengembangan ilmu pengetahuan yang memungkinkan suatu Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait dapat digunakan tanpa izin Pelaku Pertunjukan, Produser Fonogram, atau Lembaga Penyiaran.

Sanksi Pelanggaran Pasal 113

1. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

KALKULUS DASAR

Penulis:
Fanny Novika, M.Si

Desain Cover:
Tahta Media

Editor:
Tahta Media

Proofreader:
Tahta Media

Ukuran:
viii, 136, Uk: 15,5 x 23 cm

ISBN: 978-623-8192-73-1

Cetakan Pertama:
April 2023

Hak Cipta 2023, Pada Penulis

Isi diluar tanggung jawab percetakan

Copyright © 2023 by Tahta Media Group
All Right Reserved

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang keras menerjemahkan, memfotokopi, atau
memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini
tanpa izin tertulis dari Penerbit.

PENERBIT TAHTA MEDIA GROUP
(Grup Penerbitan CV TAHTA MEDIA GROUP)
Anggota IKAPI (216/JTE/2021)

KATA PENGANTAR

Puji dan Syukur dipanjatkan kepada Allah S.W.T., karena berkat Rahmat-Nya dan kesempatan yang telah diberikan, modul Kalkulus 1 dapat diselesaikan. Modul ini diselesaikan atas dukungan banyak pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada semua pihak yang membantu dan mendorong dilakukannya penulisan modul ini serta mendukung diterbitkannya modul ini.

Modul ini membahas 5 poin pokok yang digunakan sebagai bahan pembelajaran kuliah, yaitu:

1. Sistem bilangan (ruang lingkup bilangan riil, selang, ketaksamaan dan nilai mutlak), membahas jenis-jenis bilangan serta operasi pada bilangan riil. Selain itu, pada poin ini membahas pula suatu selang bilangan dan operasinya untuk menuliskan himpunan penyelesaian dari suatu ketaksamaan dan nilai mutlak;
2. Fungsi dan model, membahas tentang definisi fungsi, bagaimana daerah asal dan daerah hasil fungsi ditentukan, menggambar fungsi dalam grafik, jenis-jenis fungsi dan operasi fungsi (operasi aljabar, komposisi fungsi, transformasi fungsi). Selain itu, membahas juga penerapan fungsi dengan memodelkan kegiatan sehari-hari menjadi suatu persamaan matematis. Pada modul ini juga membahas fungsi lanjutan yaitu fungsi transenden yang meliputi fungsi invers, fungsi eksponensial, fungsi logaritma dan fungsi hiperbolik.
3. Limit dan Kekontinuan, membahas tentang definisi limit, perhitungan limit, sifat-sifat limit serta menentukan kekontinuan suatu fungsi
4. Turunan, membahas tentang definisi turunan, implementasi turunan sebagai gradien persamaan garis singgung dan kecepatan sesaat, rumus-rumus turunan, aturan-aturan untuk menyelesaikan turunan (aturan rantai dan implisit) serta turunan dengan tingkat yang lebih tinggi serta turunan fungsi implisit. Dibahas juga penerapan turunan yaitu laju terkait, nilai maksimum/minimum serta optimasi model.
5. Integral, membahas tentang definisi integral, penerapan integral sebagai luas daerah di bawah kurva, sifat-sifat integral, teorema dasar kalkulus,

teknik pengintegralan dan aplikasi integral melalui persamaan diferensial biasa.

Modul ini disertai juga latihan-latihan soal sebagai uji coba penguasaan materi yang telah ditampilkan serta terdapat rangkuman materi pada setiap bab yang berisikan tentang poin-poin penting yang dibahas pada setiap bab.

Penyusunan dan penulisan modul ini mendapat dukungan dari banyak pihak, terutama kepala Pusat Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat, Prof. Dr. Rukaesih Achmad Maolani, M.Si yang memberikan fasilitas berupa peningkatan luaran karya dosen Tak luput pula ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada para pimpinan STMA Trisakti yang telah memberikan fasilitas dibuatnya modul ini serta dukungan dari rekan-rekan seperjuangan dosen STMA Trisakti.

Semua kebaikan berasal dari Allah S.W.T dan hanya kepada-Nya lah kita pantas diberikan. Semoga dengan adanya modul ini menjadi amal jariyah penulis dan bermanfaat untuk masyarakat, khususnya mahasiswa dan tenaga pendidik di STMA Trisakti.

Jakarta, Maret 2023
Fanny Novika, M.Si
Penulis

DAFTAR ISI

Kata Pengantar	iv
Daftar Isi.....	vi
Pendahuluan	1
Bab 1 Selang, Ketaksamaan dan Nilai Mutlak	2
A. Materi Pembelajaran	3
1. Sistem Bilangan Riil.....	3
2. Selang	5
3. Ketidaksamaan	7
4. Nilai Mutlak	9
B. Latihan	11
C. Rangkuman	12
Daftar Pustaka	13
Bab 2 Fungsi dan Model	14
A. Materi Pembelajaran	15
1. Definisi Fungsi	15
2. Daerah Asal dan Hasil	16
3. Grafik Fungsi.....	17
4. Uji Garis Tegak	19
5. Jenis-jenis Fungsi	19
6. Operasi Aljabar Fungsi.....	31
7. Komposisi Fungsi.....	32
8. Transformasi Fungsi.....	33
9. Model Matematika.....	37
B. Latihan	39
C. Rangkuman	43
Daftar Pustaka	45
Bab 3 Limit dan Kekontinuan.....	46
A. Materi Pembelajaran	47
1. Definisi Limit	47
2. Sifat-sifat Limit	52
3. Kekontinuan	55

B. Latihan	57
C. Rangkuman	58
Daftar Pustaka	60
Bab 4 Fungsi Transenden	61
A. Materi Pembelajaran	62
1. Fungsi Invers	62
2. Fungsi Eksponensial	68
3. Fungsi Logaritma	72
4. Fungsi Hiperbolik	75
B. Latihan	79
C. Rangkuman	81
Daftar Pustaka	82
Bab 5 Turunan	83
A. Materi Pembelajaran	84
1. Definisi Turunan	84
2. Rumus-Rumus Turunan	89
3. Persamaan Garis Singgung	93
4. Aturan Rantai	93
5. Turunan Tingkat Tinggi	95
6. Turunan Fungsi Transenden (Logaritma dan Eksponensial)	97
7. Turunan Fungsi Implisit	98
B. Latihan	100
C. Rangkuman	102
Daftar Pustaka	103
Bab 6 Aplikasi Turunan	104
A. Materi Pembelajaran	105
1. Laju Terkait	105
2. Nilai Maksimum/Minimum	106
3. Optimasi	112
B. Latihan	114
C. Rangkuman	116
Daftar Pustaka	117

Bab 7 Integral	118
A. Materi Pembelajaran	119
1. Integral Sebagai Luas Wilayah Di Bawah Kurva.....	119
2. Sifat-Sifat Integral	125
3. Teorema Dasar Kalkulus	126
4. Teknik Pengintegralan.....	128
B. Latihan	133
C. Rangkuman	135
Daftar Pustaka	136

PENDAHULUAN

DESKRIPSI SINGKAT

Kalkulus merupakan Mata kuliah ini merupakan mata kuliah wajib yang berisi tentang aturan-aturan dasar pada perhitungan matematika sebagai landasan pada ilmu aktuaria. Mata kuliah ini membahas tentang sistem bilangan riil, selang, ketaksamaan dan himpunan penyelesaiannya, serta nilai mutlak dan himpunan penyelesaiannya. Mata kuliah ini membahas juga fungsi, jenis-jenis fungsi, langkah mencari daerah asal dan daerah hasil. Selanjutnya membahas pula limit dengan mencari penyelesaiannya serta kekontinuan dan sifat-sifatnya. Selanjutnya dibahas pula tentang turunan, sifat-sifat dan aplikasinya serta integral, teknik pengintegralan dan aplikasinya.

RELEVANSI

Mata kuliah ini merupakan tahapan pertama materi Kalkulus yang akan dilanjutkan pada Kalkulus 2 dan Kalkulus 3. Mata kuliah ini merupakan pengetahuan dasar yang dibutuhkan untuk meningkatkan keterampilan dan keahlian dan sangat digunakan pengaplikasiannya pada pemodelan aktuaria baik aktuaria asuransi jiwa maupun aktuaria asuransi umum.

TUJUAN INSTRUKSIONAL

Mahasiswa dapat mengetahui dasar-dasar matematika yang dapat bermanfaat sebagai landasan yang dapat digunakan untuk melaksanakan materi kuliah untuk semester selanjutnya.

BAB 1

SELANG, KETAKSAMAAN DAN NILAI MUTLAK

A. MATERI PEMBELAJARAN

1. Sistem Bilangan Riil

a. Himpunan Bilangan

Bilangan adalah konsep matematika yang digunakan untuk pencacahan dan pengukuran. Simbol ataupun lambang yang digunakan untuk mewakili suatu bilangan disebut sebagai angka atau lambang bilangan. Terdapat beberapa jenis-jenis bilangan dasar di antaranya:

1) Himpunan bilangan asli

Himpunan bilangan asli yaitu himpunan bilangan bulat positif yang tak nol meliputi $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$. Bilangan asli tak terhingga banyaknya. Lambang untuk bilangan asli adalah $\mathbb{N}$.

2) Himpunan bilangan cacah

Himpunan bilangan cacah yaitu himpunan bilangan bulat positif meliputi $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$. Bilangan cacah merupakan bilangan asli ditambah bilangan 0. Lambang untuk bilangan cacah adalah $\mathbb{C}$.

3) Himpunan bilangan bulat

Himpunan bilangan bulat meliputi $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Lambang untuk bilangan bulat adalah $\mathbb{Z}$.

4) Himpunan bilangan rasional

Himpunan bilangan rasional merupakan bilangan bulat yang anggotanya ditambah dengan bilangan pecahan, bilangan rasional didefinisikan

$$\left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \text{ dan } n \neq 0 \right\}$$

Bilangan irasional: con: $\sqrt{2} = 1,4 \dots \dots e = 2,4 \dots \dots, \pi = 3,14 \dots$

5) Himpunan bilangan riil

Anggota dari himpunan bilangan riil adalah gabungan dari bilangan rasional dan bilangan irasional. Lambang dari bilangan riil adalah $\mathbb{R}$. Bilangan riil diasosiasikan sebagai garis lurus, dengan titik acuan nol. Bilangan di sebelah kiri nol adalah bilangan real negative sedangkan bilangan di sebelah kanan nol adalah bilangan real positif. Bilangan irasional meliputi $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{2}, \pi, \dots$

6) Himpunan bilangan kompleks

Himpunan bilangan kompleks merupakan himpunan yang terbesar pada matematika. Secara umum, bilangan kompleks terdiri dari dua bagian yaitu bagian riil dan bagian imajiner. Bagian imajiner bercirikan adanya bilangan imajiner yang didefinisikan:

$$\sqrt{-1} = i$$

di mana bentuk umum bilangan kompleks adalah:

$$z = a + ib$$

Bentuk a merupakan bagian riil nya dan bentuk b merupakan bagian imajiner. Contoh untuk bilangan kompleks adalah solusi dari $x^2 = -25$, maka nilai x yang memenuhi adalah $x = 5i$ atau $x = -5i$

b. Sifat Urutan

Urutan pada bilangan digunakan untuk mengetahui posisi bilangan yang sedang dianalisis. Diketahui $x, y \in \mathbb{R}$ di mana $x \neq y$. Maka urutan kedua bilangan tersebut didefinisikan

- 1) $x < y$ jika dan hanya jika $(y - x) \in \mathbb{R}^+$
- 2) $x > y$ jika dan hanya jika $(y - x) \in \mathbb{R}^-$
- 3) $x \leq y$ jika dan hanya jika $(y - x) \in \mathbb{R}^+$ atau $y - x = 0$
- 4) $x \geq y$ jika dan hanya jika $(y - x) \in \mathbb{R}^-$ atau $y - x = 0$

c. Sifat-sifat pertaksamaan bilangan riil

Misalkan a, b, c, d merupakan bilangan riil, maka berlaku sifat-sifat berikut:

- 1) Transitif
Jika $a < b$ dan $b < c$ maka $a < c$
- 2) Aditif
 - a. Jika $a < b$ maka $a + c < b + c$
 - b. Jika $a < b$ dan $c < d$ maka $a + c < b + d$
- 3) Multiplikatif
 - a. Jika $a < b$ dan $c > 0$ maka $ac < bc$
 - b. Jika $a < b$ dan $c < 0$ maka $ac > bc$
- 4) Inversi
Jika $0 < a < b$ maka $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

c. Sifat-sifat persamaan bilangan riil

Diketahui : $x, y, z \in \mathbb{R}$

- 1) Komutatif : $x + y = y + x$; $xy = yx$
- 2) Asosiatif : $x + (y + z) = (x + y) + z$; $x(yz) = (xy)z$
- 3) Distributif : $x(y + z) = xy + xz$; $(x + y)z = xz + yz$
- 4) Mempunyai unsur identitas
 - Unsur Identitas Operasi penjumlahan adalah: $x + 0 = 0 + x = x$ (0 merupakan identitas penjumlahan)
 - Unsur identitas Operasi perkalian adalah: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ (1 merupakan identitas perkalian)
- 5) Memiliki invers (unsur balikan)
 - Operasi penjumlahan : untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, terdapat invers $-x$ (baca : negatif dari x), sehingga $x + (-x) = (-x) + x = 0$
 - Operasi perkalian : untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, terdapat invers $x^{-1} = \frac{1}{x}$, sehingga $x x^{-1} = x^{-1}x = 1$

2. Selang

Selang adalah himpunan bilangan riil tertentu. Misalkan a, b merupakan bilangan riil. Selang terdiri dari:

- a. Selang terbuka dari a ke b ($a < b$) berisi semua bilangan yang terletak diantara a dan b dan dinyatakan dengan lambang (a, b) . Notasi pembentukan himpunan : $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$
- b. Selang tertutup dari a ke b ($a < b$) dilambangkan dengan $[a, b]$, kedua titik ujung selang yaitu a dan b termasuk anggota himpunan. Notasi pembentukan himpunan : $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$
- c. Kurung dibelakang ∞ atau didepan $-\infty$ selalu merupakan kurung buka untuk menunjukkan bahwa tidak ada bilangan real terbesar atau terkecil.

Notasi pembentukan himpunan : $[a, \infty) = \{x \mid a \leq x\}$

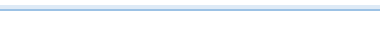
$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$

$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Secara lengkap, tabel Interval dapat diperhatikan pada Tabel 1.1. Lambang bulat yang kosong, pada notasi (a, b) menandakan bilangan a dan bilangan b tidak termasuk anggota himpunan. Sedangkan lambang

bulat yang diarsir pada notasi $[a, b]$ menandakan bilangan a dan b termasuk anggota himpunan.

Tabel 1.1 Tabel Interval

Notasi	Deskripsi Interval	Gambar
(a, b)	$\{x a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x a \leq x \leq b\}$	
$[a, b)$	$\{x a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x a < x \leq b\}$	
(a, ∞)	$\{x x > a\}$	
$[a, \infty)$	$\{x x \geq a\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x x \leq b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$	

Selang dapat dioperasikan dengan menggunakan operasi gabungan (dilambangkan dengan $\cup$) dan operasi irisan (dilambangkan dengan $\cap$). Operasi gabungan dari selang A dan selang B adalah himpunan yang setiap anggotanya merupakan anggota himpunan A atau B . Sementara, operasi irisan adalah selang A dan selang B adalah himpunan yang setiap anggotanya merupakan anggota selang A dan B . Contoh operasi himpunan pada selang adalah:

- a. $[0, 3) \cap (3, 5] = \emptyset$
- b. $[0, 3) \cup [3, 5] = [0, 5]$
- c. $[0, 3) \cup (3, 5] \neq [0, 5]$

DAFTAR PUSTAKA

- Stewart, J. Calculus. 2016. Calculus. Early Transcendentals 7th edition.
Cengage Learning
- Varberg, E. J. Purcell, S.E. Rigdon, 2007, Calculus 9th edition, PEARSON,
Prentice Hall.



CV. Tahta Media Group
Surakarta, Jawa Tengah
Web : www.tahtamedia.com
Ig : tahtamedia group
Telp/WA : +62 813 5346 4169

ISBN 978-623-8192-73-1 (PDF)



9 786238 192731