

Edi Kurniadi, S.Si., M.Si., Ph.D
Dr. Sisilia Sylviani, S.Si., M.Si
Ani Nurlaelasari, S.Si



FUNGSI KOMPLEKS DENGAN SATU VARIABEL



FUNGSI KOMPLEKS DENGAN SATU VARIABEL

Edi Kurniadi, S.Si., M.Si., Ph.D

Dr. Sisilia Sylviani, S.Si., M.Si

Ani Nurlaelasari, S.Si



Tahta Media Group

UU No 28 tahun 2014 tentang Hak Cipta

Fungsi dan sifat hak cipta Pasal 4

Hak Cipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 3 huruf a merupakan hak eksklusif yang terdiri atas hak moral dan hak ekonomi.

Pembatasan Pelindungan Pasal 26

Ketentuan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 23, Pasal 24, dan Pasal 25 tidak berlaku terhadap:

- i. penggunaan kutipan singkat Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait untuk pelaporan peristiwa aktual yang ditujukan hanya untuk keperluan penyediaan informasi aktual;
- ii. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk kepentingan penelitian ilmu pengetahuan;
- iii. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk keperluan pengajaran, kecuali pertunjukan dan Fonogram yang telah dilakukan Pengumuman sebagai bahan ajar; dan
- iv. penggunaan untuk kepentingan pendidikan dan pengembangan ilmu pengetahuan yang memungkinkan suatu Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait dapat digunakan tanpa izin Pelaku Pertunjukan, Produser Fonogram, atau Lembaga Penyiaran.

Sanksi Pelanggaran Pasal 113

1. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

FUNGSI KOMPLEKS DENGAN SATU VARIABEL

Penulis:

Edi Kurniadi, S.Si., M.Si., Ph.D

Dr. Sisilia Sylviani, S.Si., M.Si

Ani Nurlaelasari, S.Si

Desain Cover:

Tahta Media

Editor:

Tahta Media

Proofreader:

Tahta Media

Ukuran:

vii, 123, Uk: 15,5 x 23 cm

ISBN : 978-623-147-728-6

Cetakan Pertama:

Februari 2025

Hak Cipta 2025, Pada Penulis

Isi diluar tanggung jawab percetakan

Copyright © 2025 by Tahta Media Group

All Right Reserved

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang keras menerjemahkan, memfotokopi, atau
memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini
tanpa izin tertulis dari Penerbit.

PENERBIT TAHTA MEDIA GROUP

(Grup Penerbitan CV TAHTA MEDIA GROUP)

Anggota IKAPI (216/JTE/2021)

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur senantiasa kita panjatkan ke Hadhirat Allah Subhanahu Wata'ala yang senantiasa memberikan kenikmatan-Nya setiap saat. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurah kepada Baginda Nabi Muhammad Shallallahu 'alaihi Wa aalihi Wasallam, Khatamannabiyyina wal Mursalin, beserta keluarga, sahabat, dan semua penganutnya.

Buku yang berjudul “**Fungsi Kompleks Dengan Satu Variabel**” ini memuat materi komprehensif bagi mahasiswa tingkat dasar yang baru mengenal sistem bilangan kompleks. Setiap babnya disusun secara sistematis sehingga mempermudah mahasiswa untuk mempelajarinya. Dimulai dari pengenalan bilangan kompleks dan sifat-sifatnya, limit, kekontinuan, dan turunan fungsi kompleks disajikan secara sistematis beserta contoh-contohnya. Pada bagian berikutnya, penulis menyajikan teori integral fungsi kompleks, barisan dan deret bilangan kompleks yang juga disajikan dengan sistematis berdasarkan pengetahuan yang telah diperoleh dalam Kalkulus maupun Kalkulus Multivariabel. Saya yakin buku ini bisa dijadikan referensi bagi mahasiswa dalam mempelajari fungsi kompleks satu variabel.

Akhir kata, saya mengucapkan selamat kepada penulis yang telah menulis buku “**Fungsi Kompleks Dengan Satu Variabel**” ini dan telah berhasil diterbitkan oleh Penerbit CV Tahta Media. Semoga memberikan manfaat bagi seluruh pembaca dan menjadikan amal jariyah bagi penulis. Aamiin.

-Fahmi Candra Permana, S.Si. M.T-

PRAKATA

Puji dan syukur senantiasa kita panjatkan ke Hadhirat Allah Subhanahu Wata'ala yang senantiasa memberikan kenikmatan-Nya setiap saat. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurah kepada Baginda Nabi Muhammad Shallallahu 'alaihi Wa aalihi Wasallam, Khatamannabiyyina wal Mursalin, beserta keluarga, sahabat, dan semua penganutnya.

Buku berjudul “Fungsi Kotumpleks Dengan Satu Variabel” ini merupakan buku ajar yang materi di dalamnya disesuaikan dengan materi dalam mata kuliah Fungsi Kompleks dengan kode D10A2100404 yang merupakan mata kuliah wajib di semester 4 pada Program Studi S1 Matematika FMIPA Unpad. Pembaca buku ini diharapkan telah mempunyai pengetahuan dasar dalam Kalkulus maupun Kalkulus Multivariabel.

Buku ini disusun dalam lima bab dengan materi dalam keseluruhan babnya mencakup sistem bilangan kompleks dan sifat-sifatnya, Limit, kekontinuan, turunan, integrasi, barisan dan deret fungsi kompleks satu variabel. Buku-buku rujukan yang digunakan penulis dalam menyusun buku ini bersumber pada buku-buku pengenalan fungsi kompleks antara lain (Brown & Churchill, 2004; Marsden & Hoffman, 1999; Paliouras & Meadows, 2014; Palka, 2012). Materi dalam buku ini masih banyak perhitungannya dibanding proses pembuktian. Namun demikian, untuk teori-teori yang sangat penting, penulis memberikan bukti lengkapnya.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada *reviewers* buku ini yang telah membaca dan menelaah dengan teliti dan saksama serta telah memberikan masukan yang sangat konstruktif dalam penulisan buku ini. Akhir kata, semoga buku ini bermanfaat bagi kita semua. Kritik dan saran untuk perbaikan senantiasa penulis harapkan. Semoga Allah Subhanahu Wata'ala memberikan rahmat dan berkah-Nya terhadap kita semuanya. Aamiin.

Jatinangor, Februari 2025

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	iv
PRAKATA	v
DAFTAR ISI	vi
CPL/CPMK dan Sub-CPMK.....	1
BAB I KONSEP DASAR BILANGAN KOMPLEKS	2
1.1 Bilangan Kompleks	2
1.2 Modulus dan Akar Bilangan Kompleks	5
1.3 Latihan Soal Bab I	8
BAB II SIFAT-SIFAT BILANGAN KOMPLEKS	10
2.1 Representasi Bilangan Kompleks Dalam Koordinat Kutub	10
2.2 Rumus De Moivre's.....	15
2.3 Tempat Kedudukan Dalam Bidang Datar.....	17
2.4 Latihan Soal Bab II.....	20
BAB III FUNGSI-FUNGSI DASAR	24
3.1 Fungsi Eksponensial	24
3.2 Fungsi Trigonometri.....	28
3.3 Fungsi Logaritma.....	32
3.4 Latihan Soal Bab III	37
BAB IV FUNGSI DAN PEMETAAN.....	40
4.1 Fungsi Variabel Kompleks	40
4.2 Pemetaan Kompleks	41
4.3 Latihan Soal Bab IV	46
BAB V DASAR-DASAR TOPOLOGI, LIMIT, DAN KEKONTINUAN DI BIDANG	48
5.1 Dasar-Dasar Topologi Bidang	48
5.2 Limit	50
5.3 Kontinuitas.....	53
5.4 Latihan Soal Bab V.....	55
BAB VI FUNGSI ANALITIK	57
6.1 Derivatif di Bidang Kompleks.....	57
6.2 Persamaan Cauchy Riemann (PCR)	59
6.3 Fungsi Analitik	68

6.4	Latihan Soal Bab VI	74
BAB VII INTEGRAL LINTASAN/KONTUR.....		75
7.1	Lintasan	75
7.2	Integral Garis/Integral Kontur	78
7.3	Anti-Turunan	84
7.4	Latihan Soal Bab VII.....	91
BAB VIII INTEGRAL CAUCHY		94
8.1	Integral Cauchy.....	94
8.2	Rumus Umum Integral Cauchy	98
8.3	Latihan Soal Bab VIII.....	100
BAB IX DERET PANGKAT KOMPLEKS		102
9.1	Barisan dan Deret Kompleks	102
9.2	Deret Pangkat	103
9.3	Deret Taylor dan Deret Maclaren	105
9.4	Deret Laurent.....	107
9.5	Residu dan Penerapannya	110
9.6	Latihan Soal Bab IX	114
DAFTAR PUSTAKA.....		116
GLOSARIUM		117
INDEKS		119
PROFIL PENULIS		122

CPL/CPMK dan Sub-CPMK

Berikut adalah Capaian Pembelajaran Lulusan (CPL)/Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CPMK) dan sub-CPMK dalam mata kuliah Fungsi Kompleks

CPL/CPMK:

1. LO-3: Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam pengembangan IPTEK dengan memperhatikan nilai-nilai humaniora yang sesuai dengan bidang matematika (KU).
2. LO-4: Mampu menjelaskan dasar-dasar matematika, baik dalam matematika murni maupun matematika terapan (P).
3. LO-5: Mampu mengkomunikasikan dan mengembangkan pemikiran matematis, yang diawali dari penguasaan prosedural/komputasi hingga penguasaan yang luas meliputi eksplorasi, penalaran logis, generalisasi, abstraksi, dan bukti formal (KK).
4. Mampu merekonstruksi/modifikasi, menganalisis/berpikir secara terstruktur terhadap model matematika dari suatu sistem/masalah nyata, serta mengkaji keakuratan dan menginterpretasikan hasil (KK).

Sub-CPMK:

1. Sub-CPMK-1: Mampu menjelaskan (C2) notasi bilangan kompleks, fungsi kompleks, limit, dan kekontinuan, turunan fungsi kompleks, integral fungsi kompleks, barisan dan deret bilangan kompleks, residu dan teori polar.
2. Sub-CPMK-2: Mampu menyelidiki (C3) dan memeriksa (C4) sifat-sifat bilangan kompleks, fungsi kompleks, limit, dan kekontinuan, turunan fungsi kompleks, integral fungsi kompleks, barisan dan deret bilangan kompleks, residu dan teori polar.
3. Sub-CPMK-3: Mampu membuktikan (C5) sifat-sifat bilangan kompleks, fungsi kompleks, limit, dan kekontinuan, turunan fungsi kompleks, integral fungsi kompleks, barisan dan deret bilangan kompleks, residu dan teori polar.

BAB I

KONSEP DASAR BILANGAN KOMPLEKS

1.1 BILANGAN KOMPLEKS

Dalam subbab ini didefinisikan bilangan-bilangan kompleks dan dibuktikan sifat-sifat aljabarnya. *Recall* bidang xy yang dinotasikan oleh himpunan $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ adalah himpunan semua pasangan terurut bilangan real (x, y) .

Definisi 1.1. *Sistem bilangan kompleks, dinotasikan oleh \mathbb{C} , adalah himpunan \mathbb{R}^2 yang disertai dengan penjumlahan, perkalian skalar, dan perkalian kompleks yang didefinisikan sebagai berikut:*

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ \alpha(x_1, y_1) &= (\alpha x_1, \alpha y_1), \\ (x_1, y_1)(x_2, y_2) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2),\end{aligned}\tag{1.1}$$

untuk setiap $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bilangan kompleks (x, y) dapat dinyatakan dalam notasi lain yang lebih mudah untuk dipahami.

1. Bilangan-bilangan real x dapat diidentifikasi sebagai titik-titik pada sumbu- x . Artinya $(x, 0)$ dan x dapat dipandang sebagai titik yang sama yaitu $(x, 0)$ di bidang \mathbb{R}^2 . Selanjutnya, sumbu- y dinamakan sebagai sumbu khayal atau *imaginary* dan titik $(0, 1)$ dinotasikan oleh i .
2. Perhatikan bahwa:

$$(x, 0) + y(0, 1) = (x, 0) + (0, y) = (x, y)$$

maka bilangan kompleks (x, y) dapat ditulis dalam bentuk $x + yi$.

3. Penulisan iy sama dengan yi karena:

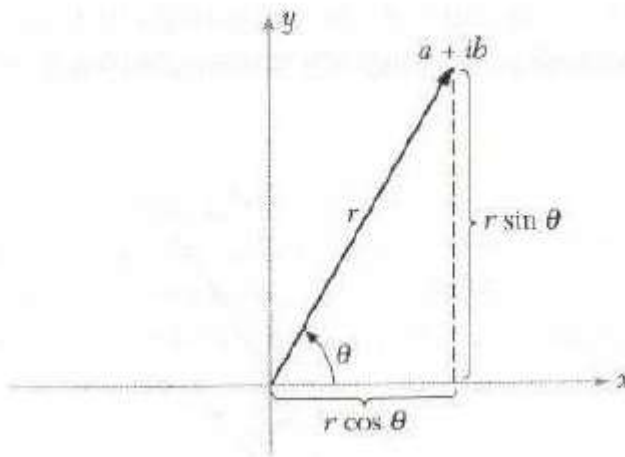
$$iy = (0, 1)(y, 0) = (0, y) = y(0, 1) = yi.$$

BAB II

SIFAT-SIFAT BILANGAN KOMPLEKS

2.1 REPRESENTASI BILANGAN KOMPLEKS DALAM KOORDINAT KUTUB

Dalam subbab ini dijelaskan representasi suatu bilangan kompleks dalam bentuk kutub. Untuk sembarang bilangan kompleks $z = a + ib$, modulus dari z diberikan oleh $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ dan sudut yang terbentuk antara z dengan sumbu real positif dinyatakan dalam $0 \leq \theta < 2\pi$. Perhatikan gambar berikut ini



Gambar 2.1. Grafik Representasi $z = a + ib$ dalam Koordinat Kutub (Marsden, J.E dan Hoffman, M.J, 1999).

Perhatikan Gambar 2.1, kita peroleh bahwa $a = r \cos \theta$ dan $b = r \sin \theta$. Oleh karena itu, representasi bilangan kompleks $z = a + ib$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

BAB III

FUNGSI-FUNGSI DASAR

Dalam subbab ini dijelaskan mengenai perluasan fungsi-fungsi dasar yang telah dipelajari dalam kalkulus ke dalam sistem bilangan kompleks. Fungsi-fungsi dasar tersebut antara lain fungsi eksponensial, fungsi trigonometri seperti sinus dan cosinus, dan logaritma. Selanjutnya dipelajari juga sifat-sifat fungsi dasar tersebut di bidang kompleks.

3.1 FUNGSI EKSPONENSIAL

Dalam kalkulus, fungsi eksponensial dinotasikan oleh $f(x) = e^x$. Fungsi eksponensial dapat didefinisikan sebagai solusi khusus persamaan $f'(x) = f(x)$ dengan syarat $f(0) = 1$. Sebagaimana sudah dipelajari dalam Kalkulus, fungsi eksponensial juga bisa dinyatakan dalam deret pangkat yaitu:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (3.1)$$

Oleh karena itu, cukup beralasan jika kita mendefinisikan e^{iy} sebagai berikut:

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}. \quad (3.2)$$

Selanjutnya dengan menguraikan Persamaan (3.2) dan mengelompokkan bagian real dan imajinernya, kita peroleh:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots \right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots \right) \\ &= \cos y + i \sin y. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Oleh karena itu, jika $z = x + iy \in \mathbb{C}$ suatu bilangan real, maka fungsi eksponensial $f(z) = e^z$ dapat diekspresikan dalam bentuk berikut ini:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (3.4)$$

Terkait fungsi eksponensial ini, berikut kita rangkum beberapa sifat yang penting untuk dipelajari:

BAB IV

FUNGSI DAN PEMETAAN

Dalam subbab ini dibahas mengenai fungsi dari variabel kompleks, pemetaan yang terdiri dari: pemetaan linear, pemetaan pangkat, pemetaan eksponensial, dan pemetaan logaritmik.

4.1 FUNGSI VARIABEL KOMPLEKS

Recall pengaitan $f: \mathbb{C} \supseteq S \ni z \mapsto w := f(z) \in \mathbb{C}$ dikatakan fungsi jika untuk setiap $z \in S$ terdapat secara tunggal $w \in \mathbb{C}$ sedemikian sehingga $w := f(z)$. Himpunan S ini merupakan domain dari definisi f . Domain f dinotasikan oleh $D_f = \{z \in S \mid w = f(z)\}$.

Contoh 4.1. Tentukan domain dari $f(z) = \frac{z}{z+\bar{z}}$.

Jawab. $z + \bar{z} \neq 0$. Dengan memisalkan $z = x + iy$ maka $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Dengan demikian, $D_f = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) \neq 0\}$.

Selanjutnya misalkan $w = u + iv$ nilai dari fungsi f di $z = x + iy$. Kondisi ini kita tuliskan dalam bentuk

$$u + iv = f(x + iy). \quad (4.1)$$

Nilai u dan v pada Persamaan (4.1) di atas bergantung pada nilai x dan y . Dengan demikian, Persamaan (4.1) dapat ditulis ulang dalam bentuk:

$$u(x, y) + iv(x, y) = f(x + iy). \quad (4.2)$$

Jika $z = re^{i\theta}$, maka Persamaan (4.2) juga dapat ditulis dalam bentuk kutub sebagai berikut:

$$u(r, \theta) + iv(r, \theta) = f(re^{i\theta}). \quad (4.2)$$

Contoh 4.2. Tentukan $u(x, y)$, $v(x, y)$, $u(r, \theta)$, dan $v(r, \theta)$ fungsi $f(z) = 2 + \bar{z}$.

Jawab. Jika $z = x + iy$ maka $2 + \bar{z} = 2 + x - iy = (2 + x) - iy$. Jadi, $u(x, y) = 2 + x$, $v(x, y) = -y$. Selanjutnya, misalkan $z = re^{i\theta}$, maka $2 +$

BAB V

DASAR-DASAR TOPOLOGI, LIMIT, DAN KEKONTINUAN DI BIDANG

Dalam subbab ini dibahas mengenai topologi di bidang kompleks, limit fungsi, dan kekontinuan fungsi. Dibahas juga sifat-sifat yang terkait limit dan kekontinuan.

5.1 DASAR-DASAR TOPOLOGI BIDANG

Misalkan $z_0 \in \mathbb{C}$ dan $r \in (0, \infty)$. Jenis-jenis cakram atau *disk* dalam \mathbb{C} diberikan sebagai berikut:

1. Cakram buka atau *open disk*

$$N(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}.$$

Himpunan $N(z_0, r)$ dinamakan juga *r-neighborhood* atau *r-disk* sekitar z_0 .

2. Cakram tutup atau *closed disk*

$$\bar{N}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}.$$

3. *Punctured open disk*

$$N^*(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\} = N(z_0, r) - \{z_0\}.$$

Himpunan $N^*(z_0, r)$ dinamakan juga *deleted r-neighborhood*.

BAB VI

FUNGSI ANALITIK

Dalam subbab ini dibahas mengenai derivatif, Persamaan Cauchy Riemann, Fungsi Analitik, fungsi entire, dan fungsi harmonik.

6.1 DERIVATIF DI BIDANG KOMPLEKS

Definisi 6.1. Misalkan $A \subseteq \mathbb{C}$ suatu himpunan buka $A \subseteq \mathbb{C}$. Fungsi $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ dikatakan diferensiabel di $z = z_0$ jika limit berikut ada

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (6.1)$$

dan dinotasikan oleh $f'(z_0)$.

Sekarang misalkan $\Delta z = z - z_0, z \neq z_0$. Maka Persamaan (6.1) dapat ditulis ulang menjadi:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(\Delta z + z_0) - f(z_0)}{\Delta z}. \quad (6.2)$$

Proposisi 6.2. Misalkan f' ada di titik $z = z_0$. Maka f kontinu di $z = z_0$.

Bukti: Diketahui $f'(z_0)$ ada yaitu $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ ada. Kita buktikan bahwa f kontinu di $z = z_0$. Untuk setiap $z \neq z_0$ berlaku

$$f(z) - f(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)} (z - z_0)$$

sedemikian sehingga kita peroleh

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)} (z - z_0) \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)} \right) \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \\ &= f'(z_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Oleh karenanya, kita peroleh bahwa:

BAB VII

INTEGRAL

LINTASAN/KONTUR

Dalam bab ini akan dibahas mengenai integral kompleks. Sebelumnya akan dibahas terlebih dahulu mengenai lintasan, lintasan halus, lintasan halus bagian demi bagian, parametrisasi ruas garis, lintasan berlawanan, dan integral garis/kontur.

7.1 LINTASAN

Pertama-tama akan diperkenalkan tentang lintasan atau *path*. Persisnya diberikan dalam definisi berikut ini:

Definisi 7.1. Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a < b$ dan misalkan $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ suatu interval tutup. Suatu lintasan γ di $A \subseteq \mathbb{C}$ adalah suatu fungsi kontinu $\gamma: [a, b] \rightarrow A$. Range dari γ disebut trayektori dan dinotasikan sebagai himpunan $|\gamma|$.

Definisi 7.2. Misalkan $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ suatu lintasan. Titik pangkal dan titik ujung dari lintasan γ diberikan oleh $\gamma(a)$ dan $\gamma(b)$ masing-masing. Jika $\gamma(a) = \gamma(b)$ maka lintasan γ dinamakan lintasan tutup atau *closed path*. Selanjutnya jika $\gamma(x_1) \neq \gamma(x_2)$ dengan $x_1 \neq x_2$ kecuali dibolehkan $\gamma(a) = \gamma(b)$ maka lintasan γ disebut lintasan sederhana atau *simple path*.

BAB VIII

INTEGRAL CAUCHY

Dalam bab ini akan dibahas mengenai integral Cauchy atas suatu lintasan tutup (tidak harus lingkaran). Sebelumnya akan recall terkait Teorema Green

8.1 INTEGRAL CAUCHY

Perhatikan kembali contoh-contoh integral berikut: Misalkan γ lintasan berupa lingkaran satuan, maka:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Namun demikian, integral berikut:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz = 0.$$

Kondisi terakhir diperoleh bukan karena teorema Cauchy tetapi karena $f(z) = \frac{1}{z^2}$ mempunyai anti turunan $F(z) = -\frac{1}{z}$ di $\mathbb{C} - \{0\}$. Perlu diingat bahwa $f(z) = \frac{1}{z^2}$ tidak analitik di mana-mana di dalam lintasan γ .

Teorema integral Cauchy mengatakan bahwa jika γ suatu lintasan tutup sederhana dan f analitik di dan di dalam γ maka

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Untuk membuktikan Teorema integral Cauchy ini, akan digunakan Teorema Green. *Recall* Teorema Green sebagai berikut: Misalkan M dan N fungsi dua peubah yang turunan-turunan pertamanya kontinu, maka:

BAB IX

DERET PANGKAT

KOMPLEKS

Dalam Kalkulus telah diperkenalkan notasi barisan bilangan real dan deret pangkat. Pengetahuan yang telah diperoleh tersebut dapat digunakan untuk memperluas barisan dan deret pangkat real ke bidang kompleks. Dalam bab ini akan dibahas deret pangkat beserta konvergensinya. Bagian-bagian awal dalam bab ini akan mengulang tentang barisan dan deret beserta sifat-sifatnya yang sudah dipelajari dalam Kalkulus.

9.1 BARISAN DAN DERET KOMPLEKS

Barisan bilangan kompleks adalah suatu fungsi bernilai kompleks yang domainnya adalah himpunan semua bilangan asli \mathbb{N} . Notasi barisan bilangan kompleks dinotasikan oleh $\{z_n\} = \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$.

Contoh 9.1. Barisan $\{i^n\}$ dapat didaftarkan dalam bentuk $\{i, i^2, i^3, \dots, i^n, \dots\}$. Definisi formal kekonvergenan barisan $\{z_n\}$ diberikan oleh definisi sebagai berikut:

Definisi 9.2. Barisan $\{z_n\}$ dikatakan konvergen jika terdapat bilangan K sedemikian sehingga jika diberikan sembarang $N(K, \epsilon)$, terdapat M_ϵ sedemikian sehingga untuk setiap $n > M_\epsilon$, z_n termuat di dalam $N(K, \epsilon)$. Dalam hal $\{z_n\}$ konvergen ke K , kita tuliskan $\lim z_n = K$ dan suatu barisan tidak konvergen, kita katakan divergen.

Komentor 9.3. Jika suatu barisan $\{z_n\}$ konvergen maka limitnya tunggal.

DAFTAR PUSTAKA

- Brown, J. W., & Churchill, R. V. (2004). *Complex Variables and Applications* (8th ed.). McGraw-Hill.
- Marsden, J. E., & Hoffman, M. J. (1999). *Basic Complex Analysis* (3rd ed.). W.H. Freeman.
- Paliouras, J. D., & Meadows, D. S. (2014). *Complex Variables for Scientists and Engineers* (2nd ed.). Dover Publication, Inc.
- Palka, B. P. (2012). *An Introduction to Complex Function Theory: Vol. XVII* (J. H. Ewing, F. W. Gehring, & P. R. Halmos, Eds.; 1st ed.). Springer New York, NY.

GLOSARIUM

- Argumen** : Sudut yang dibentuk oleh bilangan kompleks terhadap garis horizontal pada bidang kompleks.
- Bagian Imajiner** : Komponen dari bilangan kompleks yang tidak nyata, sering kali dikalikan dengan simbol untuk bilangan imajiner.
- Bagian Real** : Komponen dari bilangan kompleks yang merupakan nilai nyata atau riil.
- Barisan Bilangan Kompleks** : Suatu fungsi yang memiliki nilai bilangan kompleks dan didefinisikan pada himpunan bilangan asli.
- Barisan Imajiner** : Barisan yang elemen-elemennya hanya terdiri dari bilangan dengan komponen imajiner.
- Barisan Real** : Barisan yang elemen-elemennya hanya terdiri dari bilangan real (tanpa komponen imajiner).
- Bilangan Imajiner Murni** : Bilangan kompleks yang hanya memiliki bagian imajiner tanpa bagian real.
- Bilangan Kompleks** : Bilangan yang memiliki dua komponen, yaitu bagian real dan bagian imajiner, yang biasanya direpresentasikan bersama dalam bentuk tertentu.
- Bilangan Real** : Bilangan yang hanya memiliki komponen real tanpa bagian imajiner.
- Deret Kompleks** : Penjumlahan dari elemen-elemen dalam suatu barisan bilangan kompleks.

- Deret Pangkat : Deret yang terdiri dari elemen-elemen berbentuk pangkat suatu bilangan, biasanya digunakan untuk mendekati fungsi kompleks.
- Domain : Himpunan bilangan kompleks di mana suatu barisan atau deret terdefinisi dan berlaku.
- Kekonvergenan Barisan : Keadaan di mana barisan bilangan kompleks mendekati suatu nilai tertentu saat jumlah elemen barisan semakin besar.
- Konjugat Kompleks : Bilangan kompleks yang diperoleh dengan membalik tanda komponen imajineranya.
- Modulus : Panjang atau ukuran bilangan kompleks yang dihitung berdasarkan jaraknya dari titik asal pada bidang kompleks.

INDEKS

- anti-turunan, 89, 90, 91, 92
anulus, 96, 97, 101, 107, 108, 111
argumen, 11, 12, 13, 20
Argumen utama, 12
bagian imajiner, 3
bagian real, 3, 8, 9, 24, 60, 61, 74
bentuk kutub, 10, 11, 12, 13, 15,
20, 21, 40, 66, 67
bilangan kompleks, iv, v, 1, 2, 3,
4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14,
15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22,
24, 29, 32, 36, 37, 41, 42, 102
Bilangan-bilangan real, 2
boundary, 49, 50
boundary point, 49
cabang, 33, 34
cakram, 48, 49, 105
Cakram buka, 48
Cakram tutup, 48
closed disk, 48
closure, 50
daerah konvergensi, 104, 109,
114, 115
De Moivre's, 15, 21, 22
deformasi, 96
deleted r -neighborhood, 48
Deret Maclauren, 105, 106
deret pangkat, 24, 102, 103, 105,
114
Deret Taylor, 105, 113
derivatif, 57
diferensiabel, 57, 68
differentiable, 59, 62
disk, 48, 49, 50
divergen, 102, 103, 104, 114
DL, 107, 108, 109, 110, 111
domain, 40, 50, 70, 74, 84, 85
DP, 103, 104, 105, 106, 107
entire, 69, 70, 72, 74, 96, 99, 100
Fungsi Analitik, 57, 68
fungsi eksponensial, 24, 33, 34
fungsi *entire*, 57, 70
fungsi harmonik, 57, 70, 71, 74
fungsi kompleks, iv, v, 1, 68, 69,
105, 110, 111, 112, 113
Fungsi logaritma, 32, 33
Fungsi sinus, 29
himpunan buka, 49, 54, 57, 68,
69, 71
himpunan tutup, 49, 50, 55
holomorfik, 68
identitas trigonometri Lagrange,
22
imajiner murni, 3
independent, 85
integral Cauchy, 94, 98
Integral garis, 78
integral garis/kontur, 75, 81
integral kompleks, 75
interval tutup, 75, 77
jari-jari konvergensi, 103, 104,
114
kekontinuan, iv, v, 1, 48, 53
kenolan, 113
kenolan derajat, 113
Ketaksamaan segitiga, 14
konjuget, 4, 14, 19

kontinu, 53, 54, 57, 58, 63, 69, 70,
 71, 75, 77, 78, 82, 84, 88, 89,
 94, 95
 Kontinuitas, 53
kontur, 78
konvergen, 102, 103, 104, 105,
 114
 Konvergensi, 108
 Koordinat Kutub, 10
 limit, iv, 1, 48, 50, 51, 55, 57, 58,
 59, 60, 61, 64, 103, 110
 lingkaran berorientasi positif, 89,
 90
 lintasan, 58, 60, 61, 75, 77, 78, 79,
 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87,
 89, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97,
 98, 100, 101, 107, 108, 111,
 112, 115
 lintasan berlawanan, 75
 lintasan halus, 75
 lintasan halus bagian demi bagian,
 75
lintasan sederhana, 75
 Lintasan sederhana tidak tutup, 76
 Lintasan sederhana tutup, 76
 Lintasan tidak sederhana tutup, 76
 Lintasan tutup, 86
 lintasan tutup sederhana, 94, 95,
 96, 97, 98, 101, 108, 111
 matriks representasi, 22, 23
 Media, iii
menyeluruh, 69
modulus, 10, 11, 12, 17, 20
Modulus, 5, 6, 11, 12, 13
neighborhood, 48
nilai mutlak, 11, 21
nilai utama, 11, 34, 36, 38, 46
Nilai utama, 34
norm, 11
open disk, 48
 parametrisasi ruas garis, 75
 PCR, 59, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68,
 70, 71, 72, 73, 95
 pemetaan eksponensial, 40, 41
 pemetaan linear, 9, 13, 14, 22, 40,
 41
 pemetaan logaritmik, 40, 41
 pemetaan pangkat, 40, 41
 Persamaan Cauchy Riemann, 57,
 59
Persamaan Cauchy-Riemann,
 59, 62
persamaan Laplace, 70
 Pertaksamaan Cauchy-Schwarz,
 18, 19
Punctured open disk, 48
 putaran, 42
Range, 75
 regangan, 42
Region, 50
 residu, 1, 110, 111, 112, 115
sekawan harmonik, 72, 73, 74
simple path, 75
sinar, 45, 46
 singularitas, 98, 110
 sinus dan cosinus hiperbolik, 32
Sistem bilangan kompleks, 2
smooth, 77, 78, 79, 82, 83, 85, 91
 tempat kedudukan, 17, 18, 22
 Teorema Green, 94, 95
 Teorema Integral Cauchy, 95
titik batas, 49, 50
titik interior, 49
 titik kutub, 110

titik Newton, 77
titik singular, 69, 97, 110
titik singular terasing, 110
titik singularitas, 96, 98, 112
Trayektori, 77, 78
turunan, iv, v, 1, 58, 59, 60, 61, 62,
63, 64, 65, 68, 69, 70, 71, 72,
73, 74, 77, 80, 84, 85, 86, 88,
89, 90, 94, 99
turunan parsial, 59, 62, 63, 64, 65,
68, 69, 70, 71, 72
Tutupan, 50

PROFIL PENULIS



Edi Kurniadi, S.Si., M.Si., Ph.D

Edi Kurniadi adalah staf dosen di Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Padjadjaran. Jabatan fungsional terakhirnya adalah *Associate Professor* atau Lektor Kepala. Ia mengajar mata kuliah Aljabar Linear Elementer, Teori Grup Hingga, Aljabar Linear, dan Persamaan Beda. Program Sarjananya ia tempuh di Departemen Matematika FMIPA Unpad, kemudian ia menyelesaikan Program Magister di Departemen Matematika FMIPA ITB, dan terakhir pada tahun 2019, ia menyelesaikan Program Doktor di Graduate School of Mathematics Nagoya University, Jepang melalui Program Beasiswa Pendidikan Pasca Sarjana Luar Negeri(BPP-LN) Ristek Dikti dengan judul disertasi *Harmonic Analysis for Finite Dimensional Real Frobenius Lie Algebras*. Riset yang ditekuninya adalah *Representation Theory of Lie groups and its Lie algebras*. Sejak lulus S-3, selain aktif menulis buku, ia juga mulai aktif menulis paper di beberapa jurnal nasional maupun internasional. Dua karya terakhir yang dihasilkannya berjudul *Harmonic analysis for 4-dimensional real Frobenius Lie algebras* dan *On Square-Integrable Representations of A Lie Group of 4-Dimensional Standard Filiform Lie Algebra*. Pada tahun 2020, ia mendapat Hibah Internal Unpad dalam skema Riset Percepatan Lektor Kepala (RPLK).



Dr. Sisilia Sylviani, S.Si., M.Si.

Sisilia Sylviani merupakan seorang staf dosen di Departemen Matematika FMIPA Unpad. Beberapa Mata kuliah yang ia ampu di antaranya adalah Aljabar linear elementer, Struktur Aljabar, Analisis Kombinatorik, serta Kriptografi. Sisilia menempuh pendidikan Sarjana di Departemen Matematika FMIPA Unpad, kemudian melanjutkan ke jenjang pendidikan magister dan doktor di Departemen

Matematika FMIPA ITB. Fokus risetnya adalah *Preserver Problem dan Applied Linear Algebra* serta pengembangan gamifikasi pada pembelajaran matematik. Sisilia juga telah mempublikasikan beberapa artikel di berbagai jurnal dari mulai nasional terakreditasi hingga jurnal internasional bereputasi. Dua publikasi terbarunya berjudul *Enhancing mathematical interest through visual arts integration: A systematic literature review* dan *A Study Of Linear Mapping Preserving Pythagorean Orthogonality In Inner Product Spaces* yang diterbitkan pada jurnal internasional bereputasi.

Berbeda dengan sistem bilangan real \mathbf{R} yang dapat direpresentasikan dalam suatu garis bilangan, sistem bilangan kompleks \mathbf{C} dapat direpresentasikan di bidang. Dengan kata lain, sistem bilangan kompleks \mathbf{C} dapat dipandang sebagai sistem bilangan di bidang \mathbf{R}^2 . Pengetahuan mengenai sifat-sifat pada sistem bilangan real dapat diperluas untuk mempelajari sifat-sifat pada sistem bilangan kompleks. Buku ini mengupas tuntas sistem bilangan kompleks dan fungsi kompleks satu variabel. Terdiri dari 9 bab yaitu:

- Bab I membahas konsep dasar bilangan-bilangan kompleks
- Bab II membahas sifat-sifat bilangan kompleks
- Bab III membahas fungsi kompleks dasar seperti fungsi eksponensial, fungsi trigonometri dan logaritma
- Bab IV membahas pemetaan
- Bab V membahas topologi, limit, kekontinuan, dan turunan
- Bab VI membahas fungsi analitik
- Bab VII membahas integral lintasan
- Bab VIII membahas integral Cauchy, dan
- Bab IX membahas deret pangkat kompleks.

Buku ini sebagai hasil pengalaman penulis mengajar mata kuliah fungsi kompleks di jenjang sarjana tingkat dua. Meskipun dalam penjelasannya masih banyak melibatkan perhitungan-perhitungan tetapi beberapa teorema yang penting dibuktikan secara detail. Setiap penjelasan selalu diberikan banyak contoh soal agar pembaca bisa memahami materi dengan baik. Di bagian akhir setiap bab, diberikan juga latihan soal sebagai evaluasi terhadap pemahaman materi yang diberikan.

Buku ini ditulis secara sistematis dengan menggunakan bahasa komunikatif dan sederhana, serta mudah untuk dipelajari dan dipahami. Oleh karena itu, sangat beralasan jika buku ini dapat dijadikan rujukan bagi mahasiswa yang sedang mempelajari fungsi kompleks satu variabel dan bagi dosen sebagai bahan panduan. Selamat belajar dan temukan kemudahan memahami fungsi kompleks satu variabel dalam buku ini.



IKAPI

CV. Tahta Media Group

Surakarta, Jawa Tengah

Web : www.tahtamedia.com

Ig : tahtamedia group

Telp/WA : +62 896-5427-3996

